Lemma: Für jeden Vektor $y \in \Gamma(n)$ ist $\|y\|^2 \in 2\mathbb{Z}$.
Insbesondere ist $\|y\|^2$ ganz-zahlig.

Beweis: • Sei $y \in \Gamma_2$: $y = (y_1, \dots, y_n)$, $\sum_i y_i \equiv 0 \ (2)$

$$\to \|y\|^2 = \sum_i y_i^2 = \left(\sum_i y_i\right)^2 - 2 \sum_{i \neq j} y_i y_j \equiv 0 \ (2)$$

• Sei $y = k w_n$, dann ist $y_i = \frac{k}{2}$

$$\Rightarrow \|y\|^2 = \frac{1}{4} \cdot k^2 \cdot n \equiv 0 \ (2) \qquad \text{da} \quad n \equiv 0 \ (8)$$

• $y = x + k w_n$ mit $x \in \Gamma_2$, $k \in \mathbb{Z}$

$$\to \|y\|^2 = \|x\|^2 + \|k w_n\|^2 + 2 \langle x, k w_n \rangle \equiv 0 \ (2)$$

da: ◦ $\|x\|^2$, $\|k w_n\|^2 \equiv 0 \ (2)$ wie schon gezeigt

◦ $\langle x, w_n \rangle = \frac{1}{2} \sum_i x_i \in \mathbb{Z}$ da $x \in \Gamma_2$

später:

Lemma: $\Gamma(n) = \Gamma(n)^*$

Beweis: • $\Gamma(n) \subset \Gamma(n)^*$

zz. $y, y' \in \Gamma(n) \longrightarrow \langle y, y' \rangle \in \mathbb{Z}$

da: $y = x + k w_n$, $y' = x' + k' w_n$, $x, x' \in \Gamma_2$, $k, k' \in \mathbb{Z}$

$$\to \langle y, y' \rangle = \langle x, x' \rangle + k' \langle x, w_n \rangle + k \langle w_n, x' \rangle + k k' \|w_n\|^2$$

(Beweis Lemma oben): $\langle x, w_n \rangle$, $\langle w_n, x' \rangle \in \mathbb{Z}$

$\|w_n\|^2 = \frac{n}{4} \in \mathbb{Z}$ da $n \equiv 0 \ (8)$

$\to \langle y, y' \rangle \in \mathbb{Z}$

• $\mathrm{vol}(\Gamma(n)) = \mathrm{vol}(\Gamma(n)^*)$ folgt aus Lemma, da $\mathrm{vol}(\Gamma(n)) = 1$

$\to \Gamma(n) = \Gamma(n)^*$

allgemein:

Lemma: $\mathrm{vol}(\Gamma^\vee) = \frac{1}{\mathrm{vol}(\Gamma)}$

Beweis. Sei $e_1, \dots, e_n$ eine Basis von Γ und sei $e_1^\vee, \dots, e_n^\vee$ die duale Basis von $\Gamma^\vee$: $\langle e_i^\vee, e_j \rangle = \delta_{ij}$

$\mathrm{vol}(\Gamma) = \det(\langle e_i, e_j \rangle)$, $\mathrm{vol}(\Gamma^\vee) = \det(\langle e_i^\vee, e_j^\vee \rangle)$

$A = (a_{ij})$ definiert durch $e_i^\vee = \sum_j a_{ij} e_j$

$\Rightarrow \mathrm{vol}(\Gamma^\vee) = \det\left(\sum_{l,m} a_{il} a_{jm} \langle e_l, e_m \rangle\right)$

$= \det\left(\sum_l a_{il} \cdot \langle e_l, e_m \rangle \cdot a_{jm}\right) = (\det A)^2 \cdot \mathrm{vol}(\Gamma)$

andererseits. $\delta_{ij} = \langle e_i^\vee, e_j \rangle = \sum_k a_{ik} \langle e_k, e_j \rangle$

$\Rightarrow E = A \cdot (\langle e_k, e_j \rangle)$ $\qquad (\det A) = \frac{1}{\mathrm{vol}(\Gamma)}$

$\Rightarrow 1 = \det A \cdot \mathrm{vol}(\Gamma)$

$\Rightarrow \mathrm{vol}(\Gamma) \cdot \mathrm{vol}(\Gamma^\vee) = \mathrm{vol}(\Gamma)(\det A)^2 \,\mathrm{vol}(\Gamma) = 1$

Zusammenfassung: Zu jedem $n \in \mathbb{N}$ mit $n \equiv 0 \; (8)$ hat man ein Gitter $\Gamma(n) \subset \mathbb{R}^n$ konstruiert, das die folgenden Eigenschaften hat.

RW 1: $\forall x \in \Gamma(n): \; \|x\|^2 \equiv 0 \; (2)$

RW 2: $\Gamma(n) = \Gamma(n)^*$

Lemma: Die Gitter $\Gamma(8) \oplus \Gamma(8)$ und $\Gamma(16)$ sind nicht isometrisch.

Beweis. man zeigt:
- $\Gamma(8) \oplus \Gamma(8)$ wird erzeugt von Elementen mit Längenquadrat 2
- $\Gamma(16)$ kann nicht so erzeugt werden

$$\Gamma_2 = \{ (x_1, \dots, x_4) \in \mathbb{Z}^4 \mid \textstyle\sum_i x_i \equiv 0 \ (2) \} \subset \Gamma(8)$$

wird erzeugt von den Elementen:

$$e_1 - e_8, \ e_2 - e_8, \dots, \ e_7 - e_8, \ 2e_8$$

(8 linear unabhängige Vektoren in Γ_2 → Basis)

$\Gamma(8)$ wird erzeugt von den Elementen

$$e_1 - e_8, \dots, e_7 - e_8, \ 2e_8 \quad \text{und} \quad w_8$$

$\{e_i\}$ bzw: Standardbasis in $\mathbb{R}^4$

Bis auf $2e_8$ haben alle Erzeuger Längenquadrat gleich 2

$$2e_8 = 2w_8 - (e_1 + e_2) - (e_3 + e_4) - \dots - (e_7 - e_8)$$

→ $\Gamma(8)$ wird erzeugt von den Elementen:

$$e_1 - e_8, \dots, e_7 - e_8,$$
$$e_1 + e_2, \dots, e_5 + e_6, \ w_8$$

all diese Elemente haben Längenquadrat 2

- Elemente in $\Gamma(16)$ sind von der Form:

$$a_1 e_1 + \dots + a_{16} e_{16} \quad \text{oder} \quad (a_1 + \tfrac{1}{2}) e_1 + \dots + (a_{16} + \tfrac{1}{2}) e_{16}$$

mit $a_1, \dots, a_{16} \in \mathbb{Z}$.

Ein System von Erzeugern (ganz-zahlige Linearkombinationen) muß Elemente vom zweiten Typ enthalten

$$v = \sum_{i=1}^{16} (a_i + \tfrac{1}{2}) e_i$$

$$\Rightarrow \|v\|^2 = \sum_{i=1}^{16} (a_i + \tfrac{1}{2})^2 = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{16} (2a_i + 1)^2 \geq \frac{1}{4} \cdot 16 = 4$$

d.h. in $\Gamma(16)$ kann es kein System von Erzeugern geben, die alle Längenquadrat 2 haben.

Satz: Seien Γ, Γ' zwei Gitter in $\mathbb{R}^n$, $n = 8, 12, 16, 20$ mit den Eigenschaften RW1 und RW2. Dann sind die dazugehörigen Gitter isospektral

Beweis: Sei $Z(t)$ die Partitionsfunktion zum Laplace-Spektrum auf $(\mathbb{R}^n/\Gamma, g_\Gamma)$

$$Z(t) = \sum_{i=0}^{\infty} m_i \, e^{-\lambda_i t}$$

wobei $0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots$ die Δ-Eigenwerte sind

schon gezeigt: $Z(t)$ bestimmt das Spektrum

Fakt:
- Z ist wohl-definiert für $t > 0$
- Z ist stetig auf $(0, \infty)$

ZZ $Z_\Gamma = Z_{\Gamma'}$!

Sei $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ eine stark-fallende Funktion (Schwartz-Funktion)

Fouriertransformierte: $$\hat{f}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\, e^{-2\pi i \langle x, y\rangle} \, dy$$

Satz: (Summenformel von Poisson) Sei f eine stark-fallende Funktion. Für jedes Gitter $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ gilt:

$$\sum_{k \in \Gamma} f(k) = \frac{1}{\mathrm{vol}(\Gamma)} \sum_{m \in \Gamma^*} \hat{f}(m)$$

Beweis: $g(x) := \sum_{k \in \Gamma} f(x+k)$ $\qquad g \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, g ist Γ-invariant

$\rightarrow$ man kann g als Funktion auf $\mathbb{R}^n/\Gamma$ betrachten und nach den Δ-Eigenfunktionen entwickeln.

$$\rightarrow g(x) = \sum_{m \in \Gamma^*} c_m \, e^{2\pi i \langle m, x\rangle}$$

mit $$c_m = \frac{1}{\mathrm{vol}(\Gamma)} \int_T g(y)\, e^{-2\pi i \langle m, y\rangle} \, dy$$

$$\Rightarrow \sum_{k \in \Gamma} f(k) = g(0) = \sum_{m \in \Gamma^*} c_m$$

$$= \frac{1}{\mathrm{vol}(\Gamma)} \sum_{m \in \Gamma^*} \int_T g(y)\, e^{-2\pi i \langle m, y\rangle}\, dy$$

andererseits:

$$\int_T g(y)\, e^{-2\pi i \langle m,y\rangle}\, dy = \sum_{k\in\Gamma} \int_T f(y+k)\, e^{-2\pi i \langle m,y\rangle}\, dy$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\, e^{-2\pi i \langle m,y\rangle}\, dy$$

$$= \hat{f}(m) \qquad \square$$

<u>Anwendung:</u> $f(x) = e^{-\pi \|x\|^2}$ es gilt: $f = \hat{f}$!

Sei $\Gamma_t := \sqrt{t}\,\Gamma \subset \mathbb{R}^n$,

das Gitter Γ erfülle RW 1 und RW 2

$\hookrightarrow \mathrm{vol}(\Gamma) = 1$

$$\Rightarrow \sum_{x\in\Gamma} e^{-\pi\|x\|^2 t} = \sum_{x\in\Gamma_t} e^{-\pi\|x\|^2}$$

$$= \frac{1}{\mathrm{vol}(\Gamma_t)} \sum_{y\in\Gamma_t^*} e^{-\pi\|y\|^2}$$

$$= \frac{1}{\mathrm{vol}(\Gamma_t)} \sum_{y\in\Gamma^*} e^{-\pi\|y\|^2\cdot\frac{1}{t}}$$

$$= t^{-\frac{n}{2}} \sum_{y\in\Gamma^*} e^{-\pi\|y\|^2\cdot\frac{1}{t}}$$

Die Laplace-Eigenwerte auf $\mathbb{R}^n/\Gamma$ sind gegeben durch:

$$\lambda = 4\pi^2\|x\|^2, \quad x \in \Gamma^*$$

$$\Rightarrow Z\left(\frac{t}{4\pi}\right) = \sum_{x\in\Gamma^*} e^{-\pi\|x\|^2 t}$$

$$\Theta_\Gamma(t) := Z\left(\frac{t}{4\pi}\right)$$

<u>EZ</u> $\Theta_\Gamma = \Theta_{\Gamma'}$

Die letzte Rechnung zeigt:

$$\Theta_\Gamma(t) = t^{-\frac{n}{2}} \, \Theta_\Gamma\left(\frac{1}{t}\right)$$

<u>Bemerkung</u>:
- Die Funktion Θ_Γ setzt sich fort zu einer Funktion in einer komplexen Variablen z, die holomorph in der rechten Halbebene $\{z \mid \operatorname{Re}(z)>0\}$ ist
- Die rechte Halbebene ist erhalten unter der Abbildung $z \mapsto \frac{1}{z}$

$\Rightarrow$ $\Theta_\Gamma(z) - z^{-\frac{n}{2}} \, \Theta_\Gamma\left(\frac{1}{z}\right)$ ist holomorph in z auf $\{\operatorname{Re} z>0\}$ und identisch Null auf der rechten Achse $\mathbb{R}_+$

$\Rightarrow$ $\Theta_\Gamma(z) = z^{-\frac{n}{2}} \, \Theta_\Gamma\left(\frac{1}{z}\right)$ $\quad \forall z$ mit $\operatorname{Re} z > 0$

<u>Theta Reihe von Γ</u>

Man definiert: $\hat{\Theta}_\Gamma(z) := \Theta_\Gamma(-iz) = \sum_{x \in \Gamma} e^{i\pi z \cdot \|x\|^2}$

$\Rightarrow$ $\hat{\Theta}_\Gamma$ ist holomorph auf der oberen Halbebene $\mathbb{H}$

<u>Lemma</u>:

1. $\hat{\Theta}_\Gamma(z) = z^{-\frac{n}{2}} \, \hat{\Theta}_\Gamma\left(-\frac{1}{z}\right)$

2. $\hat{\Theta}_\Gamma(z+1) = \hat{\Theta}_\Gamma(z)$

3. $\hat{\Theta}(z) \to 1$ für $\operatorname{Im} z \to \infty$